



Аношкина Даша,  
Мальшиева Лена,  
средняя школа №1360, 8 класс

### «Фрактальный мир»: красота и математика

**Цель проекта:** исследование фракталов как интересной разновидности компьютерной графики, отражающей сущность многих природных процессов и объектов и имеющей большое значение при реализации ряда современных методов компьютерной обработки информации.

#### Задачи проекта:

- 1) сбор информации о фракталах, анализ этой информации, формулирование определения понятия «фрактал»;
- 2) поиск информации о том, где в природе встречаются фракталы; поиск красивых фотографий и рисунков фрактальных структур;
- 3) анализ основных разновидностей геометрических фракталов и алгоритмов их построения;
- 4) анализ математической сущности алгебраических фракталов;
- 5) анализ применимости фрактальных методов в компьютерной графике и различных вычислительных процессах;
- 6) поиск других возможных конфигураций геометрических фракталов;
- 7) создание «энциклопедии фракталов» в формате локального web-сайта.



В настоящее время растет интерес к применению фрактальных методов в различных областях науки и техники. Например, в физике фракталы используются при моделировании процессов поглощения и рассеяния излучений, анализе процессов

усталостного разрушения материалов, описании процесса электрического пробоя молнии и др. В биологии фракталы применяются при моделировании процессов биения сердца, моделировании динамики развития популяций и т.д.

Фракталы широко применяются в компьютерной графике – для создания высокореалистичных изображений различных природных объектов (растений, облаков, ландшафтов, водной поверхности и пр.) для компьютерных игр и компьютерного видео. Используются также методы фрактального сжатия изображений, обеспечивающие высокую степень сжатия с небольшими потерями качества.

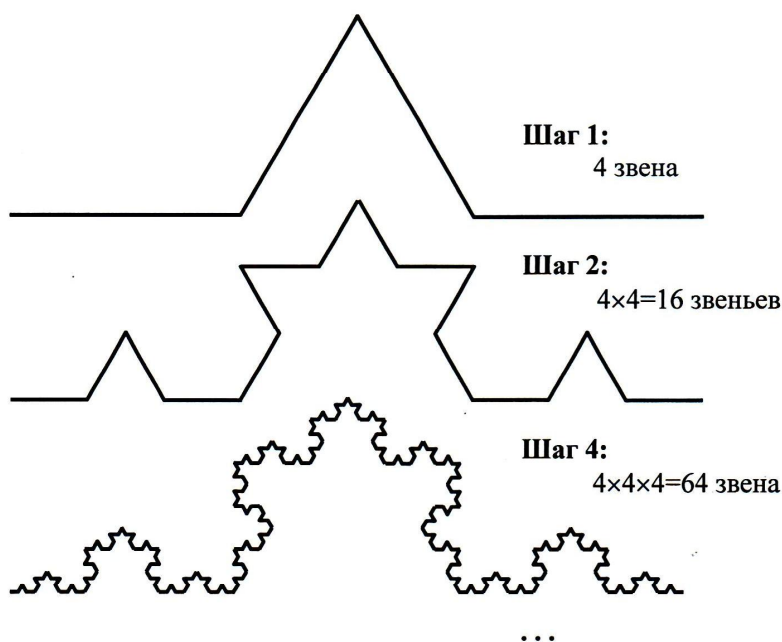
Термин «фрактал» (латинское «fractus» означает «состоящий из фрагментов») обозначает геометрическую фигуру, обладающую свойством самоподобия: состоящую из частей, каждая из которых подобна всей фигуре в целом. Этот термин предложен в 1975 г. французским математиком Бенуа Мандельбротом в его книге «Фрактальная геометрия природы» (вышла в 1977 г.).

Обычно фракталы разделяют на геометрические, алгебраические и стохастические.

Геометрические фракталы наиболее наглядны, в них сразу видна самоподобность частей. Такие фракталы исследовались математиками с XIX в. Примерами являются треугольник Серпинского, триадная кривая Коха, кривая Пеано, снежинка Коха, кривая дракона, губка Менгера и другие.

Геометрические фракталы (и вообще фрактальная компьютерная графика) основана на описании соответствующего алгоритма построения изображения по уравнению или системе уравнений. При этом подобные алгоритмы обычно являются рекурсивными. Например, вот как строится кривая Коха.

1. Задается ломаная из 4 звеньев, называемая «генератором».
2. В ней каждый отрезок заменяется ломаной, подобной этому же генератору.
3. В полученной ломаной вновь каждый отрезок заменяется генератором и т.д. до бесконечности. В предельном случае и получается фрактальная кривая. На рисунке показаны три первых шага этой процедуры для кривой Коха.



Алгебраические фракталы являются полностью абстрактными математическими моделями, а их «фрактальность» проявляется при их визуализации (графических построениях). Примеры алгебраических фракталов: множество Жюлиа, множество

Мандельброта, бассейны Ньютона. Например, множество Мандельброта определяется как множество точек  $C$  на комплексной плоскости, для которых выполняется последовательность итераций:

$$z_0 = 0,$$

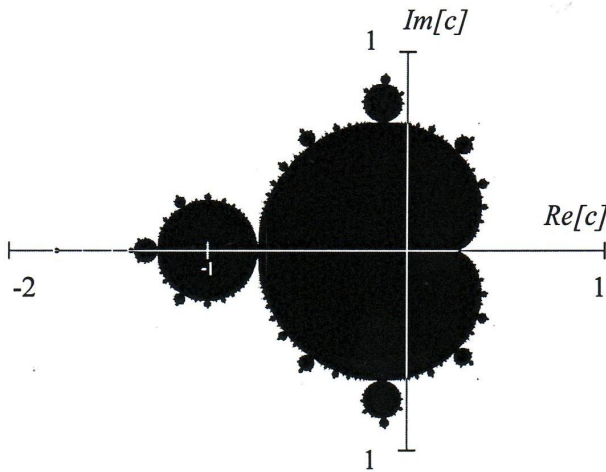
$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

Примем, что  $c = x + i \cdot y$  и выполним эту подстановку, раскрывая на каждом шаге квадраты. Если теперь представить  $z_n = x_n + i \cdot y_n$  и взять конкретное значение константы  $c = p + i \cdot q$ , то представленную последовательность можно преобразовать в итерационные последовательности значений координат  $x$  и  $y$  на комплексной плоскости:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + p,$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + q.$$

Если теперь в цикле до достаточно больших значений  $n$  выполнять построение на комплексной плоскости точек с такими координатами, то получится картина, показанная на рисунке ниже.



Стохастические («случайные») фракталы тоже связаны с последовательностями неких операций или преобразований, но каждый шаг которых выполняется случайным образом. Примерами являются траектория броуновского движения частицы (либо граница такой траектории), а также явление перколяции. Суть этого явления состоит в следующем. Предположим, что мы имеем массив не проводящего электрический ток вещества, участки которого под действием приложенного высокого напряжения подвержены случайным микропробоям (становятся проводящими ток). Задача в том, чтобы определить, в какой момент произойдет пробой всего массива вещества. Модель такого явления может быть следующей:

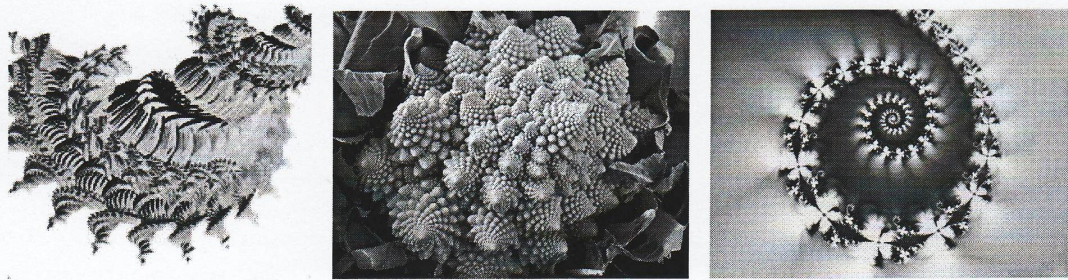
1) представим массив вещества как двумерную таблицу, состоящую из ячеек, где каждая ячейка обозначает элементарный участок вещества; изначально все ячейки этой таблицы содержат значение 0 – все участки ток не проводят;

2) на каждом шаге цикла случайным образом заменяются с 0 на 1 значения некоторого количества  $n$  ячеек, с которыми слева соседствуют единичные ячейки (а на самом первом шаге –  $n$  ячеек самого левого столбца таблицы, откуда развивается пробой);

3) после этого проверяется, не возникла ли в таблице хотя бы одна сплошная дорожка из соседних друг с другом единичных ячеек, протянувшаяся через всю таблицу от ее левого края до правого. Появление такой дорожки означает пробой всего массива вещества (и соответственно – окончание расчетов). Иначе цикл повторяется.

Получаемые в такой модели цепочки единичных ячеек (пути пробоя) и представляют собой стохастические фракталы. Так с их помощью в физике моделируется явление электрического пробоя, а также другие похожие явления, например постепенное просачивание воды через почву.

Таким образом, изучение фракталов имеет большое значение во многих отраслях науки. А кроме того, фракталы очень красивы, например:



(на среднем фото – соцветие цветной капусты – пример фрактала в живой природе).