



Разаренкова Анисия,
Васильева Ирина,
Средняя школа №1360, 8 «Б» класс

Задача о закрашивании многогранников: подходы к решению

Цель проекта: упрощение решения комбинаторной задачи для вычисления количества возможных вариантов раскраски правильных многогранников определённым заданным количеством цветов.

Задачи проекта:

1. Определение количества способов закрашивания граней правильных многогранников.
2. Анализ результатов и поиск общей закономерности.
3. Вывод формулы для решения данного типа задач.
4. Создание программы для вычисления количества способов раскрашивания правильных многогранников.

Проект представляет собой решение исходной задачи В.И. Арнольда из книги «Задачи для детей от 5 до 15 лет», целью которой является нахождение числа способов раскраски многогранников определённым количеством цветов.

Исходная задача:

Сколькими способами можно раскрасить 6 граней одинаковых кубиков 6-ю красками (1,...,6) (по одной на каждой грани) так, чтобы никакие два из получившихся раскрашенных кубиков не были одинаковыми (не переходили один в другой при каком-то вращении).

Данная задача является одной из разновидностей *комбинаторных* задач.

Введем условные обозначения:

- 1) количество способов раскраски многогранника – N ,
- 2) количество граней – G ,
- 3) количество цветов – C .

Упрощенная задача:

Дан правильный многогранник (куб) и количество красок, соответствующее количеству граней данной фигуры (6). Определить количество всех возможных вариантов раскраски многогранника.

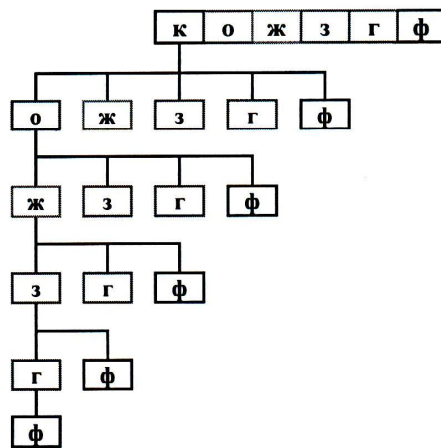
Решение.

Эту задачу можно решить при помощи «метода граф». Если первую грань куба окрасить, например, в красный цвет, то для второй грани остается 5 возможных красок; если для второй грани выбрать, скажем, оранжевый цвет, то для третьей грани остается 4 возможных краски и т.д. (см. рисунок).

Тогда, учитывая, что для первой грани может быть выбрано 6 вариантов, а далее для каждого такого варианта может быть построен аналогичный граф решения, можно сделать вывод, что общее число вариантов закрашивания граней куба равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Такое произведение всех натуральных чисел от 1 до заданного N (в данном случае $N = 6$) называют *факториалом* числа N (обозначается как $N!$).

Проанализировав аналогичным способом количества вариантов закрашивания других многогранников, можно вывести общую формулу:

$$N = G!$$



к – красный,
 о – оранжевый,
 ж – желтый,
 з – зеленый,
 г – голубой,
 ф – фиолетовый

Возвращаясь к исходной задаче, отметим, что в ней нужно найти не общее число способов закрашивания, а количество способов, различающихся при различных вращениях многогранника.

Решение.

Если первая грань окрашена в выбранный цвет, то возможно 4 варианта самосовмещения куба, когда данная грань сохраняет свое положение: это вращение на угол 90, 180, 270 и 360 градусов вокруг оси, перпендикулярной данной грани. Если же учесть, что граней 6, то всего таких геометрически одинаковых раскрасок куба будет $6 \cdot 4 = 24$ варианта.

Если учесть, что всего вариантов раскраски куба возможно 720 (6!), то количество различных вариантов раскрашивания равно $720/24 = 30$.

То есть куб можно раскрасить 30 геометрически различными способами.

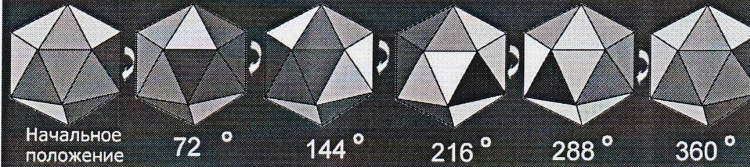
Аналогично можно провести вычисления для других правильных многогранников. В таблице ниже приведена информация о нескольких из них.

Многогранник	Кол-во граней	Общее кол-во вариантов раскраски	Кол-во вариантов самосовмещения	Кол-во вариантов одинаковых раскрасок	Кол-во различных вариантов раскрашивания
Тетраэдр	4	$4! = 24$	3	$4 \cdot 3 = 12$	$24/12 = 2$
Куб	6	$6! = 720$	4	$6 \cdot 4 = 24$	$720/24 = 30$
Октаэдр	8	$8! = 40320$	4	$8 \cdot 4 = 32$	$40320/32 = 1260$
Додекаэдр	12	$12! = 479001600$	5	$12 \cdot 5 = 60$	$479001600/60 = 7983360$

На основании этих данных была разработана компьютерная программа, позволяющая вычислять количество геометрически различных вариантов закрашивания правильных многогранников.

Икосаэдр

1) Возможно 10 варианта самосовмещения у икосаэдра:



2) Всего граней – 20.

Геометрически одинаковых раскрасок икосаэдра:
 $20 \cdot 10 = 200$ вариантов

Икосаэдр

Возможных вариантов раскраски икосаэдра:

$$20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 = 2432902008176640000$$

Количество различных вариантов раскрашивания:

$$2432902008176640000 : 200 = 12164510040883200$$

Икосаэдр можно раскрасить 12164510040883200 геометрически различными способами

Литература

1. Арнольд В.И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. М.: МЦНМО, 2004. – 16 с.
2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М: Наука, 1969. – 328 с.
3. Постников М.М. Магические квадраты. М: Наука, 1973. – 249 с.